Теорема Гаусса в интегральной форме имеет вид

Эта запись обозначает следующее. Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность, окружающую систему зарядов с общим суммарным зарядом равен .

Величину называют вектором площади. Формально его вводят как , где – нормаль к поверхности. Строго говоря, это не совсем вектор. Если заметить, что , можем записать

В этой форме интеграл может оказаться более полезным.

С помощью математической теоремы Остроградского-Гаусса, поверхностный интеграл можно свести к интегралу по объему.

Где – объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью .

Переходя к пределу

получим теорему Гаусса в дифференциальной форме

Если требуется вычислить потенциал по известному распределению заряда, используют формулу Пуассона. Получим ее.

или

Более кратко записывают

**Задача**. Вычислить интегралы.

**Решение**.

1. Метод, которым можно успешно решить интегралы, заключается в умножении искомых интегралов на постоянный вектор и последовательном применении формул векторного анализа.

Окончательно

2. Следующий интеграл решаем аналогично

3.

Дальнейшие вычисления зависят от вида функции .

4.

Далее стоит вспомнить некоторые определения и операции

Несложно непосредственно удостовериться в векторном равенстве

Поскольку

Окончательно

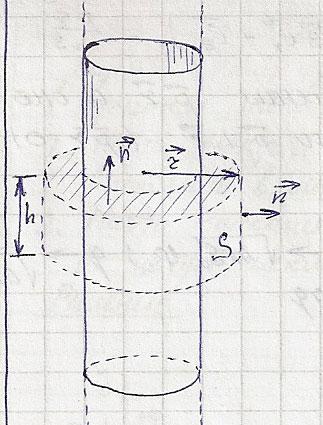
5.

Пусть , тогда, например,

Аналогично вычисляются и прочие компоненты. В итоге, компактная запись будет такой

**Задача**. Вычислить напряженность поля и потенциал бесконечно длинного кругового цилиндра, радиуса , равномерно заряженного по поверхности с линейной плотностью заряда .

**Решение**. Используем теорему Гаусса в виде



Прием, который мы используем, состоит в том, чтобы подобрать поверхность, упрощающую вычисление интеграла.

Вне цилиндра. Построим цилиндрическую поверхность высотой как на рисунке. Цилиндр бесконечный, поэтому поле всюду нормально к боковой поверхности (нет искривления поля).

где – линейная плотность заряда.

Вычисление потенциала произведем по формуле

Положим для определенности , тогда

Внутри цилиндра. Поступим аналогично. На этот раз поверхность не окружает никакие заряды, поэтому

Внутри цилиндра, очевидно

или, если сшить решение с предыдущим

**Задача**. Вычислить напряженность поля и потенциал бесконечно длинного кругового цилиндра, радиуса , равномерно заряженного по объему с объемной плотностью заряда .

**Решение**. Воспользуемся рисунком предыдущей задачи. По теореме Гаусса

Внутри цилиндра.

Полагаем, что . Тогда

Вне цилиндра.

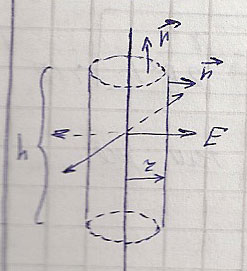
Полагаем, что .

Случается, что в случае цилиндра или нити задана не объемная плотность заряда, а линейная плотность. Можно найти связь между этими величинами.

Внутри цилиндра

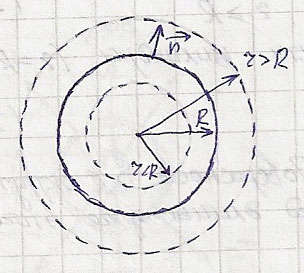
**\*\*****Задача**. Вычислить напряженность поля и потенциал бесконечной равномерно заряженной нити с линейной плотностью заряда .

**Решение**. Воспользуемся рисунком предыдущей задачи. По теореме Гаусса



**Задача**. Вычислить напряженность поля и потенциал шара, радиуса , равномерно заряженного по объему с объемной плотностью заряда .

**Решение**. Теорема Гаусса.



Внутри шара.

Поскольку полный заряд шара , можем написать

Вне шара.

Предположим, , тогда

Потенциалы можно «сшить», предположив, что . Тогда

**Задача**. Вычислить напряженность поля и потенциал сферы, радиуса , равномерно заряженной по поверхности с поверхностной плотностью заряда.

**Решение**. По теореме Гаусса.

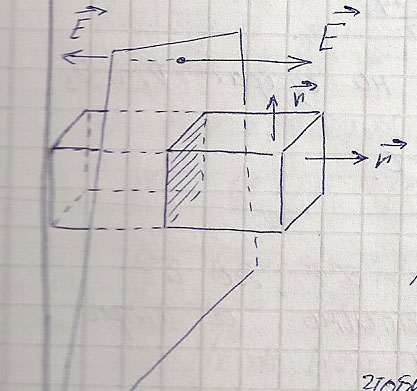
Внутри сферы.

Вне сферы.

Пусть и , тогда

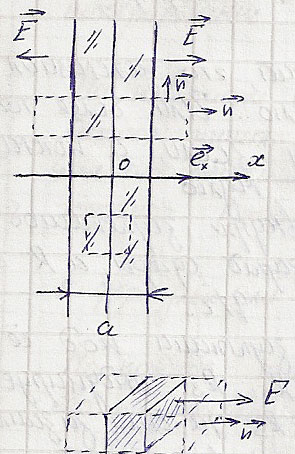
**Задача**. Вычислить напряженность поля и потенциал бесконечной плоскости, равномерно заряженной по поверхности.

**Решение**.



**Задача**. Вычислить напряженность поля и потенциал бесконечной плиты, равномерно заряженной по объему.

**Решение**.

Вне пластины.

Направление можно учесть, например, так

Внутри пластины.

Сошьем решение на границе

Для другой стороны плиты потенциал ввиду симметрии поля и самой функции будет таким же.

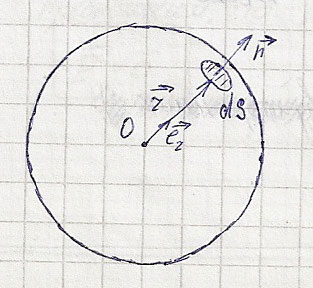
Замечание. Разумеется, константы можно было определить иначе. Например, так. При предположим, потенциал равен нулю. Тогда

Сшивая решение при , получим для

Устанавливаем симметрию

**Задача**. Сфера радиуса заряжена с поверхностной плотностью , где - постоянный вектор, – радиус вектор точки сферы относительно ее центра. Найти напряженность поля в центре сферы.

**Решение**. Решим задачу двумя способами.



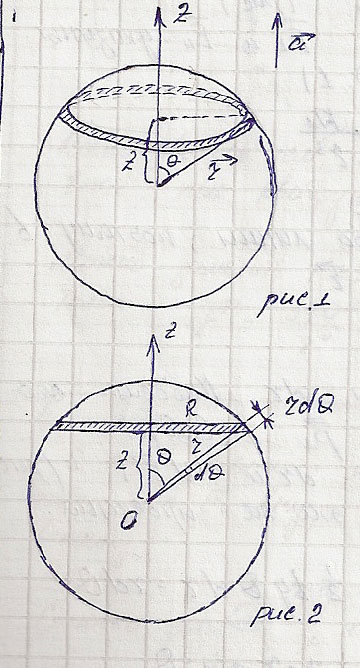
Способ 1. Элемент сферы имеет заряд . Этот заряд в центре сферы создает поле

В формуле мы учли направление поля. Полное поле найдется интегрированием по всей поверхности

Этот интеграл нам известен из предыдущих задач

Способ 2. Решим задачу без использования поверхностных интегралов.

Выделим элементарное кольцо на поверхности сферы (рис).



Направление осей координат выбрано так, чтобы при заданной поверхностной плотности заряда, кольца все же оказались равномерно заряженными. Это из-за того что на кольце .

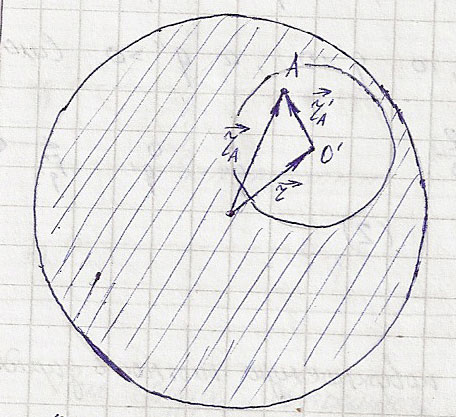
Поле равномерно заряженного кольца на его оси нам

где – радиус кольца.

Учли, что .

**\*\*****Задача [11]**. В шаре, равномерно заряженном электричеством с объемной плотностью , сделана сферическая полость, центр которой смещен относительно центра шара на расстояние . Определить электрическое поле внутри полости.

**Решение**. Предположим, что полости нет, и шар равномерно заряжен с объемной плотностью . Тогда поле в некоторой точке внутри шара



Этот результат нам известен из предыдущих задач. Это же поле можно найти иначе, как сумму двух полей: поля в полости и поля шара, который заполняет эту полость .

Шар, заполняющий полость имеет внутри себя поле

Итак

Искомое поле

Этот результат говорит о том, что поле в полости однородно, т.е. .

**Задача**. Пользуясь теоремой Гаусса в дифференциальной форме, вычислить напряженность электрического поля равномерно заряженных: 1) шара, радиуса 2) бесконечной пластины, толщиной . Объемная плотность электричества в обоих случаях равно .

**Решение**. Принципиального отличия (с некоторыми оговорками) между теоремами Гаусса в интегральной и дифференциальной форме нет. Если означает поток вектора через замкнутую поверхность произвольной формы, то можно понимать как поток вектора через бесконечно малую поверхность , ограничивающую объем .

Шар. Поле внутри шара симметрично, поэтому

Проделаем вычисления для одной компоненты. Остальные вычисляются также.

По правилу дифференцирования сложной функции

Аналогично

Тогда

Константу выбираем из условия . Т.е.

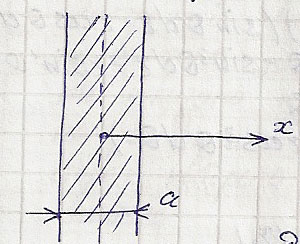
Окончательно

Вне шара

При решения должны совпадать, т.е.

Так что

Заряженная пластина. В этом случае остается только производная по .



Внутри слоя

Константу выбрали из условия .

Вне слоя

**Задача**. С какой поверхностной плотностью следует распределить заряд в шаре, чтобы поле внутри него было направлено вдоль радиуса и всюду имело одинаковую величину.

**Решение**. Теорема Гаусса в дифференциальной форме

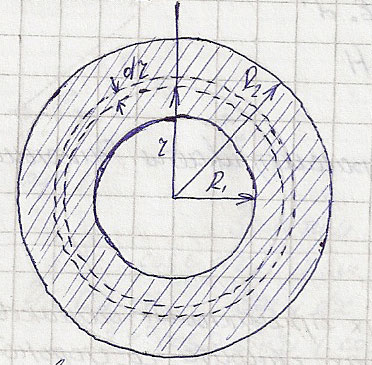
Поле, по условию задачи

Таким образом,

**Задача** **[6**]. Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых и заряжено с объемной плотностью . Найти полный заряд , потенциал и напряженность электрического поля. Рассмотреть предельный случай .

**Решение**.

1. Найдем полный заряд . Выделим тонкий сферический слой толщиной , достаточный для того, чтобы плотность заряда в нем считать постоянной (поскольку она радиально симметрична).



2. Напряженность поля ищем в трех областях. Для этого проще всего использовать теорему Гаусса в интегральной форме.

При очевидно

При выделяем сферическую поверхность внутри слоя и находим поток

При

3. Потенциал найдется по формуле

При

Полагаем , тогда

При

Сошьем решение с предыдущим

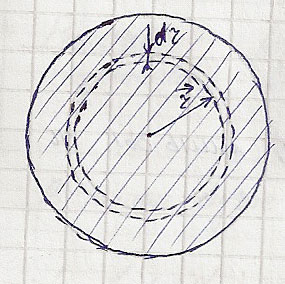
При

Также сшиваем

Рассмотрим случай . Пусть и

**Задача [5]**. Заряд распределен сферически симметричным образом . Разбив распределение заряда на сферические слои, выразить через потенциал и напряженность поля.

**Решение**. Предыдущая задача – частный случай нашей задачи. Теперь дадим общее решение. Мысленно выделяем тонкую сферу радиуса . Можно считать, что заряд в ней распределен равномерно ввиду его симметрии. Заряд внутри сферы



Полный заряд находится суммированием по всем таким сферам:

Напряженность поля вычислим по теореме Гаусса

С учетом направления и предыдущего результата, напишем

Потенциал

Интегрируем обе части равенства от до , полагая, что .

Этот интеграл можно преобразовать к более удобному виду.

Интегрируем его по частям :

Полагаем . Тогда

Заметим также, что

Мы применили известную формулу дифференцирования интеграла

Окончательно запишем

**\*\*\*Задача [5]**. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, найти потенциал и напряженность 1) шара, равномерно заряженного по объему с объемной плотностью заряда , 2) сферы, равномерно заряженной по поверхности c поверхностной плотностью заряда .

Решение.

Шар. Пусть - радиус шара.

При

При

Сфера. В этом случае объемная плотность заряда выразим через обобщенную функцию

где – сферические координаты.

Обобщенные функции обладают замечательными свойствами, которые гораздо легче использовать, чем обосновывать. В частности, вот как выглядят некоторые интегралы с этой функцией

Интегрирование может проводиться по любому промежутку, только бы он содержал точку .

Итак,

При , очевидно , поскольку -функция равна нулю.

Пусть . Интеграл имеет значение только в точке :

**\*\*\*Задача [5]**. Заряд электрона размещен в атоме водорода, находящемся в нормальном состоянии с плотностью

где см – боровский радиус, –элементарный заряд. Найти потенциал и напряженность электрического поля электронного заряда, а также полные потенциал и напряженность поля в атоме, считая, что протонный заряд расположен в центре.

**Решение**. Пока отвлечемся от протонного центра и вычислим потенциал и напряженность по известным нам формулам с учетом радиальной симметрии.

Производим интегрирование по частям. Второй интеграл

Первый интеграл:

Этот интеграл мы уже вычисляли

Т.е.

Собираем все вместе

Переходим к вычислению напряженности

Для протонного центра:

Полное поле

Потенциал

**\*\*\*Задача [5]**. Каким распределением зарядов создается потенциал, имеющий в сферических координатах вид

где – постоянные.

**Решение**. Уравнение Лапласа:

Оператор Лапласа в сферических координатах

В нашем случае остается только радиальная часть

Проведем для дальнейшего некоторые полезные преобразования

Итак,

Однако следует учесть наличие заряда в начале координат. Сделаем это так

Уравнение Лапласа для точечного заряда:

Для вычисления второго слагаемого используем выведенное ранее соотношение

Тогда

Система состоит из точечного заряда в начале координат и сферически симметричного объемного заряда с плотностью

**Замечание**. Прием, к которому мы прибегли, не меняет решение задачи, в силу единственности ее решения. Если бы мы так не сделали, то в итоге потеряли бы решение в точке . Решение было бы таким